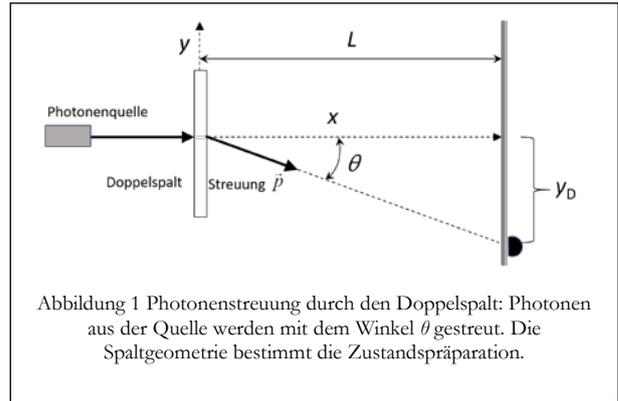


Einzel- und Doppelspalt mit Einzelphotonen

Abb. 1 zeigt die prinzipielle Anordnung. Die Analyse erfolgt ohne Bezug auf ein Wellenmodell in aufsteigendem Anforderungsniveau:

1. Einzel-/Doppelspalt ohne Breitenkontur
2. Einzel-/Doppelspalt mit endlicher Breite

Die Länge der Spalte wird als so groß angenommen, dass keine Einwirkung auf das Ergebnis zu erwarten ist. Sie bleibt daher ohne Berücksichtigung. Die Analyse stützt sich demnach auf folgende Parameter:



Photonenimpuls/deBroglie-Wellenlänge $\vec{p}; |\vec{p}| = \hbar k = \hbar \frac{2\pi}{\lambda}$; Spaltbreite b ; Spaltabstand d ; Abstand Spalte/Schirm L

Zustandspräparation und -detektion am schmalen Einzelspalt

Der Zustand eines Photons am schmalen Einzelspalt an der Position y_1 lässt sich in Ortsdarstellung durch die Diracsche δ -Funktion beschreiben:

$$\langle y | \psi_1 \rangle = C \cdot \delta(y_1 - y) \quad (1)$$

Die Impulseigenfunktionen für die y -Komponente p_y des Impulses beschreiben die Streuung durch den Spalt. Der Wechsel in die Impulsdarstellung erfolgt nach dem quantenmechanischen Darstellungsformalismus:

$$\begin{aligned} \langle p_y | \psi_1 \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} dy \langle p_y | y \rangle \langle y | \psi_1 \rangle = \frac{C}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} dy \exp\left(-\frac{i}{\hbar} p_y \cdot y\right) \delta(y_1 - y) \\ &= \frac{C}{\sqrt{2\pi\hbar}} \exp\left(-\frac{i}{\hbar} p_y \cdot y_1\right). \end{aligned} \quad (2)$$

Die Impulseigenfunktion zum Eigenwert p_y ist durch $\langle y | p_y \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \exp\left(\frac{i}{\hbar} p_y \cdot y\right)$ gegeben. Die Wahrscheinlichkeitsdichte $p(p_y)$ wird nach der BORN'schen Regel berechnet:

$$p(p_y) = \left| \langle p_y | \psi_1 \rangle \right|^2 = \frac{C^2}{2\pi\hbar} \exp\left(-\frac{i}{\hbar} p_y \cdot y_1\right) \exp\left(\frac{i}{\hbar} p_y \cdot y_1\right) = \frac{C^2}{2\pi\hbar}. \quad (3)$$

$p(p_y)$ ist offenbar konstant. Eine Normierung zur Festlegung des Vorfaktors erfordert damit eine Einschränkung der maximalen Unschärfe des Impulses Δp_y , da $\int_{-\infty}^{\infty} dp_y P(p_y)$ andernfalls divergiert.

Zustandspräparation und -detektion am schmalen Doppelspalt

Im Falle des Doppelspalt ist Zustandsfunktion des Photons durch die Superposition gegeben

$$|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\psi_1\rangle + |\psi_2\rangle). \quad (4)$$

Die Ortsdarstellung wird hier im symmetrischen Fall: $\langle y | \psi_0 \rangle = \frac{C}{\sqrt{2}} \cdot (\delta(y_1 - y) + \delta(y_2 - y))$. (5)

Wie oben folgt für die Darstellung der Zustandsfunktion im Impulsraum

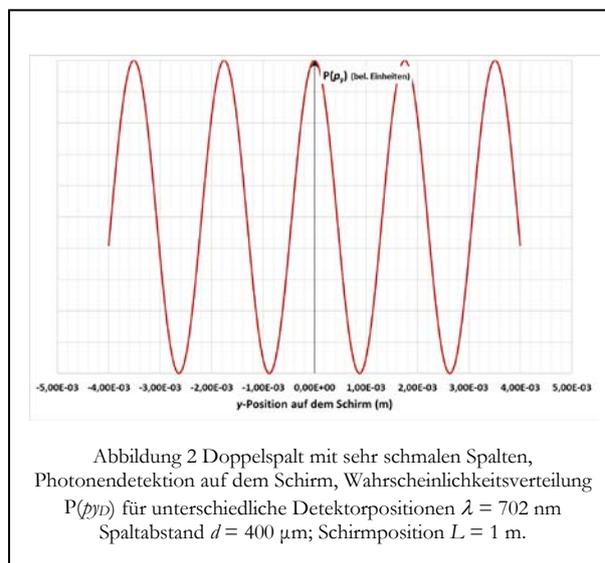
$$\begin{aligned} \langle p_y | \psi_0 \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} dy \langle p_y | y \rangle \langle y | \psi_0 \rangle = \frac{C}{\sqrt{2\pi\hbar}} \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{\infty} dy \exp(-\frac{i}{\hbar} p_y y) (\delta(y_1 - y) + \delta(y_2 - y)) \\ &= \frac{1}{2} \frac{C}{\sqrt{\pi\hbar}} (\exp(-\frac{i}{\hbar} p_y y_1) + \exp(-\frac{i}{\hbar} p_y y_2)). \end{aligned} \quad (6)$$

Die BORN'sche Regel liefert wieder die Wahrscheinlichkeitsdichte:

$$\begin{aligned} p(p_y) &= |\langle p_y | \psi_0 \rangle|^2 = \left| \frac{1}{2} \frac{C}{\sqrt{\pi\hbar}} (\exp(-\frac{i}{\hbar} p_y y_1) + \exp(-\frac{i}{\hbar} p_y y_2)) \right|^2 \\ &= \frac{1}{4} \frac{C^2}{\pi\hbar} (1 + 1 + \exp(-\frac{i}{\hbar} p_y y_1) \exp(\frac{i}{\hbar} p_y y_2) + \exp(\frac{i}{\hbar} p_y y_1) \exp(-\frac{i}{\hbar} p_y y_2)) \\ &= \frac{1}{2} \frac{C^2}{\pi\hbar} (1 + \cos \frac{1}{\hbar} p_y (y_1 - y_2)) = \frac{1}{2} \frac{C^2}{\pi\hbar} (1 + \cos \frac{1}{\hbar} p_y d). \end{aligned} \quad (7)$$

Mithilfe der Beziehung $p_y = |\vec{p}| \sin \theta = \hbar \frac{2\pi}{\lambda} \sin \theta$ und $y_D \approx L \sin \theta$ lassen sich in Gl. (7) beobachtbare Variablen einführen (Abb. 2)

$$p(p_y) = \frac{1}{2} \frac{C^2}{\pi\hbar} (1 + \cos \frac{1}{\hbar} p_y d) = \frac{1}{2} \frac{C^2}{\pi\hbar} \left(1 + \cos 2\pi \frac{d}{\lambda} \sin \theta \right).$$



Zustandspräparation und -detektion am endlichen Einzelspalt

Realistischer ist es, mit einer endlichen Spaltbreite zu argumentieren. Als einfachstes Modell kann als Ortzustandsfunktion eine einfache Rechteckfunktion, Mitte y_1 Breite b , verwendet werden.:

$$\langle y | \psi_1 \rangle = \frac{1}{\sqrt{b}} \begin{cases} 1; & y_1 - b/2 \leq y \leq y_1 + b/2 \\ 0; & \text{sonst} \end{cases} \quad (8)$$

Der Vorfaktor sichert die Normierung. Wie oben, wird daraus die Zustandsfunktion im Impulsraum konstruiert:

$$\begin{aligned}
\langle p_y | \psi_1 \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} dy \langle p_y | y \rangle \langle y | \psi_1 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} dy \exp\left(-i \frac{p_y}{\hbar} y\right) \langle y | \psi_1 \rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar b}} \int_{y_1-b/2}^{y_1+b/2} dy \exp\left(-i \frac{p_y}{\hbar} y\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar b}} \frac{i\hbar}{p_y} \left(\exp\left(-i \frac{p_y}{\hbar} (y_1 + b/2)\right) - \exp\left(-i \frac{p_y}{\hbar} (y_1 - b/2)\right) \right) \\
&= \sqrt{\frac{2\hbar}{\pi b}} \frac{1}{p_y} \exp\left(-i \frac{p_y}{\hbar} y_1\right) \sin\left(\frac{p_y b}{\hbar 2}\right).
\end{aligned} \tag{9}$$

Die Wahrscheinlichkeitsdichte folgt aus der BORNschen Regel:

$$\begin{aligned}
p(p_y) &= \left| \sqrt{\frac{2\hbar}{\pi b}} \frac{1}{p_y} \exp\left(-i \frac{p_y}{\hbar} y_1\right) \sin\left(\frac{p_y b}{\hbar 2}\right) \right|^2 \\
&= \frac{2\hbar}{\pi b} \left(\frac{1}{p_y}\right)^2 \sin^2\left(\frac{p_y b}{\hbar 2}\right) = \frac{b}{2\pi\hbar} \operatorname{sinc}^2\left(\frac{p_y b}{\hbar 2}\right).
\end{aligned} \tag{10}$$

In dieser Darstellung ist die Wahrscheinlichkeitsfunktion normiert:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dp_y p(p_y) = \frac{b}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dp_y \operatorname{sinc}^2\left(\frac{p_y b}{\hbar 2}\right) = \frac{b}{2\pi\hbar} \frac{2\hbar}{b} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} d\kappa \operatorname{sinc}^2(\kappa)}_{\pi} = 1 \tag{11}$$

Zustandspräparation am Doppelspalt

Am Doppelspalt tritt eine Superposition der Zustandsfunktionen für jeden der beiden Spalte auf

$$|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\psi_1\rangle + |\psi_2\rangle). \tag{12}$$

Die Ortsdarstellung der Zustandsfunktionen für den symmetrischen Fall ist.

$$\langle y | \psi_1 \rangle = \frac{1}{\sqrt{b}} \begin{cases} 1; & y_1 - b/2 \leq y \leq y_1 + b/2 \\ 0; & \text{sonst} \end{cases}, \quad \langle y | \psi_2 \rangle = \frac{1}{\sqrt{b}} \begin{cases} 1; & y_2 - b/2 \leq y \leq y_2 + b/2 \\ 0; & \text{sonst} \end{cases}. \tag{13}$$

Analog zum Einfachspalt lässt sich aus Gl. (13) die Impulsdarstellung $\langle p_y | \psi \rangle$ herleiten:

$$\begin{aligned}
\langle p_y | \psi_0 \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} dy \langle p_y | y \rangle \langle y | \psi_0 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar b}} \int_{-\infty}^{\infty} dy \exp\left(-i \frac{p_y}{\hbar} y\right) (\langle y | \psi_1 \rangle + \langle y | \psi_2 \rangle) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar b}} \frac{2\hbar}{p_y} \left(\exp\left(-i \frac{p_y}{\hbar} y_1\right) + \exp\left(-i \frac{p_y}{\hbar} y_2\right) \right) \sin\left(\frac{p_y b}{\hbar 2}\right) \\
&= \sqrt{\frac{\hbar}{\pi b}} \frac{1}{p_y} \sin\left(\frac{p_y b}{\hbar 2}\right) \left(\exp\left(-i \frac{p_y}{\hbar} y_1\right) + \exp\left(-i \frac{p_y}{\hbar} y_2\right) \right).
\end{aligned} \tag{14}$$

Die Wahrscheinlichkeitsdichte folgt wieder aus der BORNschen Regel:

$$\begin{aligned}
 p(p_y) &= \left| \sqrt{\frac{\hbar}{\pi b}} \frac{1}{p_y} \sin\left(\frac{p_y}{\hbar} b/2\right) \left(\exp\left(-i \frac{p_y}{\hbar} y_1\right) + \exp\left(-i \frac{p_y}{\hbar} y_2\right) \right) \right|^2 \\
 &= \frac{b}{4\pi\hbar} \operatorname{sinc}^2\left(\frac{p_y}{\hbar} b/2\right) \left[1 + 1 + 2 \cos\frac{p_y}{\hbar} (y_1 - y_2) \right] \\
 &= \frac{b}{2\pi\hbar} \operatorname{sinc}^2\left(\frac{p_y}{2\hbar} b\right) \left[1 + \cos\frac{p_y}{\hbar} d \right] \\
 &= \frac{1}{2\pi\hbar} \operatorname{sinc}^2\left(\pi \frac{b}{\lambda} \frac{y_D}{L}\right) \left[1 + \cos 2\pi \frac{d}{\lambda} \frac{y_D}{L} \right].
 \end{aligned} \tag{15}$$

Die cos-Modulation der Wahrscheinlichkeit als Funktion der Richtung hinter dem Spalt tritt jetzt wieder auf: Die Superposition der Zustände am Spalt wird durch Quanteninterferenz sichtbar. Zusätzlich bildet die sinc-Funktion eine Einhüllende, die den Einfluss der endlichen Spaltbreite zeigt. Mit $\sin\theta = y_D/L$ werden wieder messbare Größen eingeführt. Mit den identischen Parametern wie oben, aber einer endlichen Breite b der Spalte, ergibt sich das nachfolgende, sehr viel realistischere Bild.

